İki matris veya iki vektörün Hadamart çarpımı

Üçüncü tip çarpım, Hadamart çarpımı olarak adlandırılmaktadır. Eğer iki matris veya iki vektör aynı boyutlu ise Hadamart çarpımı karşılıklı elemanların çarpımı ile elde edilir.

$$a_{ij} b_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} b_{11} & a_{12} b_{12} & \cdots & a_{1p} b_{1p} \\ a_{21} b_{21} & a_{22} b_{22} & \cdots & a_{2p} b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} b_{n1} & a_{n2} b_{n2} & \cdots & a_{np} b_{np} \end{pmatrix}$$

1.3. Parçalanmış Matrisler

Bazen bir matrisi alt matrislere parçalamak mümkün olabilir. Örneğin bir A matrisinin uygun bir şekilde dört parçaya ayrılması aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right)$$

4x5 boyutlu bir A matrisinin parçalanışını aşa. gibi gösterelim.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|cc} 7 & 2 & 5 & 8 & 4 \\ -3 & 4 & 0 & 2 & 7 \\ \hline 9 & 3 & 6 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

Burada,

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

Eğer A ve B matrisleri çarpılabilir matrisler ve A ve B matrisleri parçalanmış ise alt matrisler çarpılabilir matrislerdir. AB çarpımı aşağıdaki gibi elde edilir.

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

Eğer B matrisi elemanları iki kümeye ayrılmış bir b vektörü ile değiştirilirse aşağıdaki gibi olur.

$$Ab = (A_1, A_2)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = A_1 b_1 + A_2 b_2$$

Burada, A_1 sütununun sayısı b_1'in elemanlarının sayısına eşittir. A_2 ve b_2 benzer olarak çarpılabilirdir.

NOT

Ayırma işlemi $A = (A_1, A_2)$ virgül ile gösterilebilir.

Yukarıdaki parçalanmış çarpım aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$Ab = (a_1, a_2, \ldots, a_p)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$$

$$= b_1 a_1 + b_2 a_2 + \cdots + b_p a_p$$

ÖRNEK

Bir A matrisi ve b vektörü aşağıdaki gibi verilsin.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$Ab = \begin{pmatrix} 17 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix}$$

A'nın sütunlarının lineer bir birleşimini kullanarak,

$$Ab = b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3$$

$$= 4 \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + -1 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 24 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix}$$

bulunur.

AB çarpımının sütunlarının, A nın sütunlarının lineer bir birleşimi olduğu görülür. Ab'nin J. sütununun katsayıları B'nin J. sütununun elemanlarıdır.

Bir matris ile bir satır vektörünün çarpımı a'B, B'nin satırlarının lineer bir birleşimi olarak ifade edilebilir.

$$a'B = (a_1, a_2, \ldots, a_n)\begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \\ \vdots \\ b_n' \end{pmatrix}$$

$$= a_1 b_1' + a_2 b_2' + \cdots + a_n b_n'$$

AB çarpımının satırları, B'nin satırlarının lineer bir birleşimidir.

Sonuç olarak, eğer bir A matrisi $A = (A_1, A_2)$ şeklinde parçalanmış ise,

$$A' = (A_1, A_2)' = \begin{pmatrix} A_1' \\ A_2' \end{pmatrix}$$

yazılır.

RANK

Matris rankından önce lineer bağımlılık ve bağımsızlık kavramlarını verelim.

$a_1, \dots, a_n$ vektörler olsun.

$$c_1 a_1 + \dots + c_n a_n = 0 \quad \dots (1)$$

eşitliğini sağlayan hepsi aynı anda sıfır olmayan c_i skalerleri var ise $a_1, \dots, a_n$ vektörlerine lineer bağımlı vektörler denir.

(1) eşitliği ancak, $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ için sağlanıyorsa $a_1, \dots, a_n$ vektörleri lineer bağımsızdır denir.

Tanım: A, bir kare veya dikdörtgen matris olsun. Rank(A), A'nın lineer bağımsız satır veya sütun sayısına denir.

A'nın bir elemanı dışındaki diğer tüm elemanları sıfır ise Rank(A)=1.

Sıfır matrisinin rankı sıfırdır.